УДК 517.977 **DOI** 10.17150/2500-2759.2017.27(2).281-285

КВАДРАТИЧНЫЕ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Г. В. Сидоренко
Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация

Информация о статье
Дата поступления
27 марта 2017 г.
Дата принятия к печати
12 апреля 2017 г.
Дата онлайн-размещения
31 мая 2017 г.

Ключевые слова
Линейные дискретные управляемые системы; множество достижимости; внешние квадратичные оценки; экономико-математические модели

Аннотация
Линейные дискретные управляемые системы — наиболее популярный объект в экономико-математическом моделировании. Модели, описываемые линейными разностными уравнениями, типичны при рассмотрении динамических вариантов модели Леонтьева. Разностные уравнения, как правило, описывают динамику интенсивностей технологических способов. Подобную роль разностные уравнения играют и в модели Неймана. Часто используемые в других экономико-математических моделях линейные дифференциальные уравнения при своей дискретизации порождают те же линейные дискретные цепочки. В силу этого, изучение таких систем, с точки зрения оценки их возможностей, задача вполне актуальная. Неоднозначность значений траекторий порождается либо управляющими параметрами системы, либо ее возмущениями. В работе предлагаются квадратичные оценки возможных состояний линейных дискретных систем.

SQUARE-LAW ASSESSMENTS OF A STATE IN LINEAR DISCRETE CONTROL SYSTEMS

Gennady V. Sidorenko
Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation

Article info
Received
March 27, 2017
Accepted
April 12, 2017
Available online
May 31, 2017

Keywords
Linear discrete controlled systems; feasible set; external square-law assessments; economic-mathematical models

Abstract
Linear discrete controlled systems are the most popular object in economic-mathematical modelling. The models described by the linear discrete equations are characteristic when considering dynamic variants of Leontief model. The discrete equations describe intensiveness dynamics of the processes. The discrete equations play a similar role in Neumann model too. In other economic-mathematical models, the frequently-used linear differential equations derivate the same discrete chains by their digitization. Thus, studying such systems is a relevant task in terms of capacity assessment. Trajectory values' ambiguity is created either by system's control parameters or its disturbancies. The article suggests the square-law assessments of possible states of linear discrete systems.

Типичная задача при экономико-математическом моделировании — исследование соотношений, определяющих математическую модель. Часто эти модели являются какими-либо дифференциальными или разностными уравнениями, нередко линейными. Исследования, как правило, сводятся к изучению свойств решений этих уравнений или поиску оптимальных в каком-либо смысле решений [1–5]. В данной работе рассматриваются свойства решений линейных дискретных управляемых систем, а именно, строятся оценки возможных состояний системы — оценки множества достижимости. Оценивание производится при помощи множеств уровня квадратичных функций, в частности, эллипсоидов. Преимуществом такого метода оценивания является задание небольшого количества вспомогательных функций (часто достаточно одной), присутствующих в описании внешней оценки множества достижимости. Итак, рассмотрим линейную дискретную управляемую систему:

$$x(t+1) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t),$$

$$t \in T = [t_0,\ t_1,\ \dots,\ t_k],$$

$$x(t_0) \in X_0, \qquad u(t) \in U(t),$$

$$x(t) \in R^n,\quad u(t) \in R^m,\quad X_0 \subset R^n,\quad U(t) \subset R^m,$$

где $x(t)$ — состояние системы в момент $t \in T$; $u(t)$ — управляющий или возмущающий параметр; X_0 — множество начальных состояний системы; $U(t)$ — область, описывающая всевозможные значения данных параметров в момент $t \in T$; $A(t)$ и $B(t)$ — матрицы соответствующих размерностей.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$U(t) = \{u \in R^n : u'N(t)u \le 1\},$$

где $N(t) > 0$ — симметричная положительно определенная матрица, т. е. множество $U(t)$ есть эллипсоид.

Траекторией данной управляемой системы $\{x(t)\}_{i=0}^{k}$ называется последовательность векторов $\{x(t_0), x(t_1),\ \dots, x(t_k)\}$, $x(t_0) \in X_0$ удовлетворяющая рекуррентной цепочке при некоторой последовательности $\{u(t_0),\ u(t_1),\ \dots, u(t_{k-1})\}$, $u(t) \in U(t)$, $t \in T$.

Множеством достижимости рассматриваемой системы в момент $t \in T$ будем называть совокупность значений всех траекторий $\{x(t)\}_{i=0}^{k}$ в момент $t \in T$ и обозначать $X_D(t)$. Множество $X(t) \subset R^n$ будем называть внешней оценкой множества достижимости в момент $t \in T$, если $X_D(t) \subset X(t)$.

Определим внешние квадратичные оценки множества достижимости линейной дискретной системы. Для этого приведем один простой, не самый общий, но достаточно эффективный результат о внешней оценке множества достижимости [6–10]. Пусть управляемая дискретная система имеет вид:

$$x(t+1) \in V(t, x(t)),$$

$$x(t_0) \in X_0, \qquad t \in T = [t_0,\ t_1,\ \dots,\ t_k].$$

Введем вспомогательную функцию $\varphi : T \times R^n \to R^1$. Тогда внешняя оценка множества достижимости такой системы определяется лебеговскими множествами функции $\varphi(t, x)$:

$$X(t) = \{x \in R^n : \varphi(t, x) \le \max_{x \in X_0} \varphi(t_0, x) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mu(\tau)\},$$

где

$$\mu(\tau) = \sup_{x \in R^n} \max_{v \in V(t,x)} [\varphi(t+1, v) - \varphi(t, x)],\ \ v \in V(t, x).$$

Отметим, что функционал $\mu(\tau)$ можно оценивать сверху, не меняя сути результата.

Для получения квадратичной оценки множества достижимости линейной дискретной системы достаточно выбрать функцию $\varphi(t, x) = x'\sigma(t)x$, где $\sigma(t)$ — квадратная матрица порядка n, $t \in T$ [2; 5].

Выпишем соответствующие конструкции:

$$\begin{aligned}
&\varphi(t+1, v) - \varphi(t, x) = \\
&= x'(t+1)\sigma(t+1)x(t+1) - x'(t)\sigma(t)x(t) = \\
&= (A(t)x + B(t)u)'\sigma(t+1)(A(t)x + B(t)u) - x'\sigma(t)x = \\
&= x'[A'(t)\sigma(t+1)A(t) - \sigma(t)]x + \\
&+ 2x'A'(t)\sigma(t+1)B(t)u + u'B'(t)\sigma(t+1)B(t)u.
\end{aligned}$$

Данную функцию необходимо исследовать на экстремум (на «максимум») по переменным $x \in R^n$, $u \in U(t)$.

Рассмотрим вторую задачу и проведем оценку сверху для функционала $\mu(t)$:

$$\max\{f_1(u) + f_2(u)\} \le \max f_1(u) + \max f_2(u).$$

Поэтому, вначале найдем максимум линейного по u слагаемого. Обозначим

$$p = B'(t)\sigma(t+1)A(t).$$

Тогда задача примет следующий вид:

$$p'u \to \max,\quad u'N(t)u \le 1.$$

Ее решение известно, это есть опорная функция эллипсоида:

$$\max\{p'u : u'N(t)u \le 1\} = \sqrt{p'N^{-1}(t)p} = \Psi_{U(t)}(p).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим:

$$\Psi_{U(t)}(p) =$$

$$= \sqrt{x'A'(t)\sigma(t+1)B(t)N^{-1}(t)B'(t)\sigma(t+1)A(t)x}.$$

Функция $\sqrt{f}$ — вогнутая в области $f \ge 0$. Тогда график любой касательной к графику $f(x)$ в этой области лежит не ниже графика $f(x)$. Получаем оценку:

$$\sqrt{f} \le \sqrt{z} + \frac{1}{2\sqrt{z}}(f - z) = \frac{\sqrt{z}}{2} + \frac{f}{2\sqrt{z}},$$

где $z > 0$ — выбирается произвольно. Тогда опорная функция эллипсоида имеет оценку сверху:

$$\Psi_{U(t)}(p) \le \frac{\sqrt{z}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{z}} \times$$

$$\times x'A'(t)\sigma(t+1)B(t)N^{-1}(t)B'(t)\sigma(t+1)A(t)x.$$

Обозначая $q = \sqrt{z}$, $q(t) > 0$, получаем:

$$\begin{aligned}
\mu(t) \le x'[&\frac{1}{q}A'(t)\sigma(t+1)B(t)N^{-1}(t)B'(t) \times \\
&\times \sigma(t+1)A(t) - \sigma(t) + A'(t)\sigma(t+1)A(t)]x + \\
&+ u'B'(t)\sigma(t+1)B(t)u.
\end{aligned}$$

Bulletin of Baikal State University, 2017, Vol. 27, no. 2, pp. 281–285

Выберем последовательность матриц $\{\sigma(t)\}_{t=t_0}^{t_k}$, удовлетворяющей рекуррентной цепочке:

$$\sigma(t) = A'(t)[\sigma(t+1) +$$
$$+\frac{1}{q}\sigma(t+1)B(t)N^{-1}(t)B'(t)\sigma(t+1)]A(t).$$

Замкнем ее конечным условием в момент t_k:

$$\sigma(t_k) = C,$$

где C — симметричная матрица. Отсюда и вытекает вид внешней оценки множества достижимости, где $\sigma(t) = \sigma(t, q, C)$:

$$X(t) = X(t,\ q, C) =$$
$$= \{x \in R^n : x'\sigma(t)x \le \max_{x \in X_0} x'\sigma(t_0)x +$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t-1}(q(t) + \max_{u \in U(t)} u'B(t)\sigma(t+1)B'(t)u)\}.$$

Если матрица $C > 0$ положительно определена, то $\sigma(t) \ge 0$ — неотрицательно определенная матрица. В случае, когда и $\sigma(t) > 0$ — положительно определена, то данная оценка будет эллипсоидом.

Отметим, что на самом деле определено семейство внешних оценок множества достижимости, зависящее от двух параметров: матрицы C, задающей форму оценочного эллипсоида в момент t_k и скалярной дискретной функции $q(t) > 0,\ \ t \in T$. Пользуясь этими параметрами, можно получать разные по форме оценки множества достижимости. Их пересечение $\bigcap\limits_{q,C} X(t, q, C)$ также будет являться внешней оценкой множества достижимости.

Рассмотрим пример:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + hx_2(t),$$
$$x_2(t+1) = x_2(t) + hu(t),$$
$$x_1(0) = 0,\quad x_2(0) = 0,\quad |\, u \,| \le 1,$$
$$h = 0.5,\quad t \in T = [0,\ 0.5,\ 1].$$

Разрешая данную рекуррентную цепочку при всевозможных значениях $u(t) \in U$, получим множества достижимости этой управляемой системы:

$$X_D(0) = \{0\},$$
$$X_D(0.5) = \{x \in R^2 : x_1 = 0,\quad |\, x_2 \,| \le 0.5\},$$
$$X_D(1) = \{x \in R^2 : |\, x_1 \,| \le 0.25,\quad |\, x_2 \,| \le 1\}.$$

Построим квадратичные оценки множества достижимости. Зададим функцию $\varphi(t, x) = x'\sigma(t)x$. Выпишем и вычислим соответствующие объекты:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix},\qquad N = (1),$$

$$BN^{-1}B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix},\qquad q(t) = q = const > 0,$$

$$\max_{x \in X_0} x'\sigma(0)x = 0,$$

$$\max_{u \in U} u'B'\sigma(t+1)Bu = h^2\sigma_{22}(t+1)u^2 =$$
$$= \begin{cases} h^2\sigma_{22}(t+1), & \sigma_{22}(t+1) \ge 0, \\ 0, & \sigma_{22}(t+1) < 0 \end{cases}.$$

Рекуррентная цепочка для матрицы $\sigma(t)$ имеет вид ($\sigma_{12} = \sigma_{21}$):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}(t) & \sigma_{12}(t) \\ \sigma_{12}(t) & \sigma_{22}(t) \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} \sigma_{11}(t+1) & \sigma_{12}(t+1) \\ \sigma_{12}(t+1) & \sigma_{22}(t+1) \end{pmatrix}A +$$
$$+\frac{h^2}{q}A'\begin{pmatrix} \sigma_{12}^2(t+1) & \sigma_{12}(t+1)\sigma_{22}(t+1) \\ \sigma_{12}(t+1)\sigma_{22}(t+1) & \sigma_{22}^2(t+1) \end{pmatrix}A.$$

Зададим начальные условия для нее в момент $t = 1$:

$$\sigma(1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

где $a > 0$, $b > 0$ — произвольные параметры.

Разрешая эти соотношения, получим:

$$\sigma(0.5) = \begin{pmatrix} a & ah \\ ah & ah^2 + b + \dfrac{h^2}{q}b^2 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $\sigma(0)$ имеют вид:

$$\sigma_{11}(0) = a + \frac{h^4a^2}{q},$$

$$\sigma_{12}(0) = 2ah + \frac{h^5a^2}{q} + \frac{h^3a}{q}\left(h^2a + b + \frac{h^2}{q}b^2\right),$$

$$\sigma_{22}(0) = b + 4ah^2 +$$
$$+\frac{h^2}{q}\left(\begin{array}{c} 4h^4a^2 + 4h^2ab + 2b^2 + \\ +\dfrac{h^2}{q}\left(4h^2ab^2 + 2b^3 + \dfrac{1}{q^2}h^2b^4\right) \end{array}\right).$$

Подсчитаем правую часть в неравенстве, задающем внешнюю оценку множества достижимости в момент $t = 1$:

$$\sum_{t=t_0}^{t-1}(q(t) + \max_{u \in U(t)} u'B(t)\sigma(t+1)B'(t)u)\} =$$
$$= 2q + h^2\sigma_{22}(0.5) + h^2\sigma_{22}(1) =$$
$$= 2q + h^4a + 2h^2b + \frac{h^4b^2}{q}.$$

Тогда внешняя оценка множества достижимости в момент $t = 1$ будет

$$X(1,\ a,\ b,\ q) =$$
$$= \left\{x \in R^2 : x_1^2 + bx_2^2 \le 2q + h^4a + 2h^2b + \frac{h^4b^2}{q}\right\}.$$

Известия Байкальского государственного университета. 2017. Т. 27, № 2. С. 281–285

ISSN 2500-2759

На самом деле, это семейство внешних оценок. При любых $a > 0$, $b > 0$, $q > 0$ все они будут эллипсами. Исследуем зависимость данных эллипсов от параметров $a > 0$, $b > 0$, $q > 0$. Найдем параметры, определяющие эллипс наименьшей площади.

Поскольку левая часть неравенства, определяющего оценку, не зависит от параметра $q > 0$, то найдем значение $q > 0$, при котором правая часть минимальна. Необходимое условие экстремума дает

$$2-\frac{h^4b^2}{q^2}=0.$$

Отсюда, учитывая условие $q > 0$, получим:

$$q^*=\frac{h^2b}{\sqrt{2}}.$$

Нетрудно убедиться, что эта точка есть точка минимума. Тогда минимальное значение правой части неравенства, задающего оценку, будет $h^2b(2\sqrt{2}+2)+h^4a$.

Поскольку $a > 0$, $b > 0$, то внешнюю оценку можно записать в виде

$$X(1,a,b,q^*)=\left\{\begin{matrix} x\in R^2:\dfrac{a}{h^2b(2\sqrt{2}+2)+h^4a}x_1^2+ \\ +\dfrac{b}{h^2b(2\sqrt{2}+2)+h^4a}x_2^2\le 1\end{matrix}\right\}.$$

Площадь $S(a,\ b)$ этого эллипса есть

$$S(a,b)=\pi\left(h^2(2\sqrt{2}+2)\sqrt{\frac{b}{a}}+h^4\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

Найдем оптимальное отношение b/a, дающее наименьшее значение площади оценивающего эллипса. Данная задача решается аналогично задаче минимизации по $q > 0$ и дает оптимальное отношение параметров $a > 0$, $b > 0$:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^*=\frac{h^2}{2\sqrt{2}+2}.$$

Наименьшая площадь оценочного эллипса есть

$$S^*=\min_{a>0,\ b>0}S(a,\ b)=2\pi h^3\sqrt{2\sqrt{2}+2}.$$

Подставляя найденное оптимальное отношение $(b/a)^*$ в определение внешней эллипсоидальной оценки, получим:

$$X^*(1)=\left\{x\in R^2:\frac{x_1^2}{2h^4}+\frac{x_2^2}{2(2\sqrt{2}+2)h^2}\le 1\right\}.$$

Подставляя значение параметра $h = 0.5$, получим оптимальный в смысле площади эллипс, оценивающий множество достижимости:

$$X^*(1)=\left\{x\in R^2:8x_1^2+\frac{x_2^2}{\sqrt{2}+1}\le 1\right\}.$$

Его площадь: $S^*=0.25\pi\sqrt{2\sqrt{2}+2}\approx 1.72.$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику / С. А. Ашманов. — М. : Наука, 1984. — 296 с.

2. Леонтьев В. Экономические эссе. Теория, исследования, факты и политика : пер. с англ. / В. Леонтьев. — М. : Политиздат, 1990. — 415 с.

3. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. — М. : Айрис-пресс, 2002. — 576 с.

4. Красс И. А. Математические модели экономической динамики / И. А. Красс. — М. : Сов. радио, 1976. — 280 с.

5. Первозванский А. А. Математические модели в управлении производством / А. А. Первозванский. — М. : Наука, Физматлит, 1975. — 616 с.

6. Константинов Г. Н. Нормирование воздействий на динамические системы / Г. Н. Константинов. — Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1983. — 188 с.

7. Константинов Г. Н. Внешние оценки множеств достижимости управляемых систем / Г. Н. Константинов, Г. В. Сидоренко // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. — 1986. — № 3. — С. 28–34.

8. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления / В. И. Гурман. — М. : Наука, Физматлит, 1997. — 288 с.

9. Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения / под. ред. В. И. Гурмана, Г. Н. Константинова. — Новосибирск : Наука, 1990. — 190 с.

10. Модели управления природными ресурсами / под. ред. В. И. Гурмана. — М. : Наука, Физматлит, 1981. — 264 с.

REFERENCES

1. Ashmanov S. A. *Vvedenie v matematicheskuyu ekonomiku* [Introduction to Mathematical Economics]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 296 p.

2. Leont'ev V. *Ekonomicheskie esse. Teoriya, issledovaniya, fakty i politika* [Essays in Economics. Theory, Research, Facts and Politics]. Moscow, Politizdat Publ., 1990. 415 p.

3. Intriligator Michael D. *Mathematical Optimization and Economic Theory*. New Jersey, Prentice-Hall, 1971. 508 p. (Russ. ed.: Intriligator Michael. *Matematicheskie metody optimizatsii i ekonomicheskaya teoriya*. Moscow, Airis-press, 2002. 576 p.).

ISSN 2500-2759

4. Krass I. A. *Matematicheskie modeli ekonomicheskoi dinamiki* [Mathematical Models of Economic Dynamics]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1976. 280 p.

5. Pervozvanskii A. A. *Matematicheskie modeli v upravlenii proizvodstvom* [Mathematical Models in Production Management]. Moscow, Nauka Fizmatlit Publ., 1975. 616 p.

6. Konstantinov G. N. *Normirovanie vozdeistvii na dinamicheskie sistemy* [Normalization of Effects on Dynamic Systems]. Irkutsk State University Publ., 1983 188 p.

7. Konstantinov G. N., Sidorenko G. V. External assessments of attainabily sets of controlled systems. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika = Engineering Cybernetics*, 1986, no. 3, pp. 28–34. (In Russian).

8. Gurman V. I. *Printsip rasshireniya v zadachakh upravleniya* [Extension Principle in Management Tasks]. Moscow, Nauka Fizmatlit Publ., 1997. 288 p.

9. Gurman V. I., Konstantinov G. N. (eds). *Metody resheniya zadach teorii upravleniya na osnove printsipa rasshireniya* [Extension Principle-based Methods of Solving Problems of Control Theory]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1990. 190 p.

10. Gurman V. I. (ed.). *Modeli upravleniya prirodnymi resursami* [Models of Natural Resource Management]. Moscow, Nauka Fizmatlit Publ., 1981. 264 p.

Информация об авторе

Сидоренко Геннадий Васильевич — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и эконометрики, Байкальский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: gennadijsidorenko@yandex.ru.

Библиографическое описание статьи

Сидоренко Г. В. Квадратичные оценки состояния в линейных дискретных системах управления / Г. В. Сидоренко // Известия Байкальского государственного университета. — 2017. — Т. 27, № 2. — С. 281–285. — DOI: 10.17150/2500-2759.2017.27(2).281-285.

Author

Gennady V. Sidorenko — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics and Econometry, Baikal State University, 11 Lenin St., 664003, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: gennadijsidorenko@yandex.ru.

Reference to article

Sidorenko G. V. Square-law assessments of a state in linear discrete control systems. *Izvestiya Baykal'skogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Baikal State University*, 2017, vol. 27, no. 2, pp. 281–285. DOI: 10.17150/2500-2759.2017.27(2).281-285. (In Russian).

ISSN 2500-2759