УДК 519.626 **DOI** 10.17150/2500-2759.2017.27(2).274-280

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ПОЛИТИКИ ФИРМЫ

Е. В. Аксенюшкина
Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация

Информация о статье

Дата поступления
9 марта 2017 г.

Дата принятия к печати
17 марта 2017 г.

Дата онлайн-размещения
31 мая 2017 г.

Ключевые слова

Сильно экстремальное управление; инвестиционная политика; функция Понтрягина; линейное программирование

Аннотация

В статье рассматривается экономическая ситуация, в рамках которой финансовая организация (например, банк) выстраивает свою инвестиционную политику, распоряжаясь имеющимися финансовыми средствами. Средства финансовой организации делятся на собственные и полученные от вкладчиков в процессе деятельности. Банк привлекает средства клиентов, например, в виде вкладов по некоторой процентной ставке, неся при этом расходы по выплате процентов за использование этих средств. Таким образом, банк может выдавать кредиты по существующей процентной ставке, имея в своем распоряжении собственные и привлеченные средства. Основная цель финансовой организации состоит в формировании такой финансовой политики и таком распределении прибыли на инвестиции (процентный рост) и потребление (дивиденды), чтобы обеспечить максимальный объем потребления за некоторый период планирования. Эта ситуация представляет собой билинейную задачу оптимального управления. В основе исследования в направлении достаточных условий оптимальности в классе представленных задач лежит принцип максимума Понтрягина. В задаче оптимального управления формируются сильно экстремальные управления. Опираясь на ранее проводимые исследования, можно сказать, что они являются оптимальными управлениями. Следовательно, описанный подход представляет оптимальную инвестиционную политику финансовой организации.

THE OPTIMAL INVESTMENT POLICY OF THE COMPANY

Elena V. Aksenyushkina
Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation

Article info

Received
March 9, 2017

Accepted
March 17, 2017

Available online
May 31, 2017

Keywords

Critically extremal control; investment policy; the Pontryagin function; linear programming

Abstract

The article describes the economic situation where a financial organisation (e.g. a bank) builds its investment policy using available financial resources. A financial organization has two kinds of resources: internal funds and funds, received from depositors. For example, the bank raises funds by taking deposits under certain rate of interest, bearing costs of interest payments. Thus, the bank, possessing the available and outside funds, can grant loans under the current rate of interest. The main objective of such a financial organisation is to form such an investment and profit distribution policy on investment (percentage growth) and usage (interest payments) to ensure maximum consumption for a certain planning period. The situation represents a bilinear task of an optimal control. At the core of the studies on sufficient conditions of optimality lays the Pontyagin's maximum principle. The optimal control problem forms critically extreme controls, which are also optimal, judging by previous studies. Hence, the approach described represents the financial organisation's optimal investment policy.

ISSN 2500-2759

Bulletin of Baikal State University, 2017, Vol. 27, no. 2, pp. 274–280

Первоначальным этапом является постановка задачи. Она формализуется на языке оптимального управления. Подобные модели уже были рассмотрены [1; 2].

Пусть $[0,\ T]$ — период планирования; $x(t)$ — собственные средства (например, прибыль) банка в момент $t \in [0,\ T]$; $y(t)$ — средства, полученные в виде некоторого займа.

Проведем распределение (управление прибылью):

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

где $x_1(t)$ — часть прибыли, идущая на инвестиции; $x_2(t)$ — часть прибыли, распределенная на потребление.

Пусть $r_1 \in (0,\ 1]$ — процентная ставка по инвестициям; $r_2 \in (0,\ 1]$ — процентная ставка по кредиту. В результате объем прибыли в момент t определяется следующим соотношением:

$$x(t) = x(0) + r_1 \int_0^t x_1(\tau) d\tau + r_1 \left[\int_0^t y(\tau) d\tau - r_2 \int_0^t y(\tau) d\tau \right].$$

Далее в рассмотрение вводятся управляющие функции (управление): $v(t)$ — доля собственных средств, идущая на инвестиции в момент t; $u(t)$ — отношение привлеченных средств к собственным в момент t, т. е.

$$u(t) = \frac{y(t)}{x(t)}.$$

По смыслу управлений имеют место ограничения:

$$u(t) \geq 0, \quad v(t) \in [0,\ 1], \quad t \in [0,\ T].$$

Тогда объем прибыли $x(t)$ характеризуется следующими соотношениями:

$$x(t) = x(0) +$$

$$+ r_1 \int_0^t x(\tau) v(\tau) d\tau + r_1 \left[\int_0^t y(\tau) d\tau - r_2 \int_0^t y(\tau) d\tau \right] =$$

$$= x(0) + r_1 \int_0^t x(\tau) v(\tau) d\tau + r_1 (1 - r_2) \int_0^t x(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Если $r = r_1,\ c = 1 - r_2,\ 0 \leq c \leq 1$, то

$$x(t) = x(0) + r \int_0^t x(\tau) [v(\tau) + cu(\tau)]\, d\tau.$$

В результате дифференцирования получаем фазовое уравнение с начальным условием $x(0) = x_0$:

$$\dot{x} = r\,(cu + v) x.$$

Кроме того, предположим, что выполнено следующее неравенство:

$$\frac{\dot{x}}{x} \leq g.$$

Оно характеризует ограниченные возможности банка по наращиванию собственных средств: относительный прирост собственных средств (темп прироста) ограничен сверху величиной $g = \text{const} > 0$.

В силу фазового уравнения, получаем дополнительное условие на управления:

$$cu(t) + v(t) \leq \frac{g}{r}, \quad t \in [0,\ T],$$

будем предполагать, что $g/r \leq 1$.

Запишем выражение для целевого функционала:

$$\Phi\,(u, v) = \int_0^T (1 - v(t))\, x(t) dt - \int_0^T u(t) x(t) dt.$$

Пусть $\rho > 0$ — параметр дисконтирования, причем $\rho < r$. Следовательно, целевой функционал примет вид:

$$\Phi\,(u, v) = \int_0^T e^{-\rho t} (1 - u(t) - v(t))\, x(t) dt.$$

Таким образом, получаем следующую задачу оптимального управления:

$$\Phi\,(u, v) = \int_0^T e^{-\rho t} (1 - u(t) - v(t))\, x(t) dt \to \max,$$

$$\dot{x} = r\,(cu + v)\, x, \quad x(0) = x_0,$$

и множество допустимых управлений:

$$W = \left\{ \begin{matrix} (u(\cdot), v(\cdot)) \in PC\,[0,\ T] : (u(t), v(t)) \in V, \\ t \in [0,\ T] \end{matrix} \right\},$$

где

$$V = \left\{ \begin{matrix} u\,(t) \geq 0,\ \ 0 \leq v\,(t) \leq 1, \\ cu\,(t) + v\,(t) \leq \dfrac{g}{r}, \\ t \in [0, T],\ \ c \in [0, 1),\ \ r < \rho \end{matrix} \right\}.$$

Вторым этапом является процедура решения задачи. Получена билинейная задача оптимального управления, которая решается с использованием принципа максимума Понтрягина [3–7]. Составим функцию Понтрягина:

$$H(\psi,\ x,\ u,\ v) = \psi r (cu + v) x + (1 - u - v) x.$$

Сопряженное уравнение имеет вид:

$$\dot{\psi} = \rho \psi - r \psi (cu + v) - (1 - u - v), \quad \psi(T) = 0,$$

его решение записывается следующим образом:

$$\psi(t) = \frac{u - v - 1}{r\,(cu + v) - \rho} \left(1 - e^{(r(cu + v) - \rho)(T - t)}\right).$$

Рассмотрим фазовое уравнение для данной задачи:

$$\dot{x} = r\,(cu + v)\, x, \quad x(0) = x_0,$$

его решение будет положительным

$$x(t, u, v) = x_0 e^{r(cu + v)t} \geq 0 \qquad (1)$$

$$\forall t \in [0,\ T], \quad v, u \in V.$$

Пусть $x(t) \in X$ — множество фазовых траекторий. Построим пару управлений, удовлетворяющих принципу максимума, по следующему правилу:

$$(\bar{u}(t), \bar{v}(t)) = \underset{u, v \in V}{\arg\max} H(\psi(t, \bar{u}, \bar{v}), x(t, \bar{u}, \bar{v}), u, v),$$

$$t \in [0, T],$$

тогда сильно x-экстремальное управление будет иметь вид:

$$(\bar{u}(t), \bar{v}(t)) = \arg \max_{u, v \in V} H(\psi(t, \bar{u}, \bar{v}), x(t), u, v),$$

где $x(t) \in X$ — произвольная фазовая траектория. Подставим значение функции Понтрягина:

$$(\bar{u}(t), \bar{v}(t)) =$$

$$= \arg \max_{u, v \in V} (r\psi(t, \bar{u}, \bar{v})\,(cu + v) - u - v)\, x(t),$$

так как $x(t) \geq 0$. С учетом этого можно утверждать, что сильно x-экстремальное управление будет оптимальным в рассматриваемой задаче [8; 9].

Таким образом, для поиска оптимальных управлений необходимо решить следующую задачу:

$$((\psi rc - 1)u + (\psi r - 1)v)x \to \max, \quad u \in V,\ v \in V.$$

Поскольку $x(t) \geq 0$, согласно (1), то задача на поиск управлений $u^*(t)$ и $v^*(t)$ эквивалентна задаче

$$(\psi rc - 1)u + (\psi r - 1)v \to \max,$$

$$cu + v \leq \frac{g}{r}, \quad u \geq 0, \quad v \in [0,\ 1].$$

Обозначим

$$y_1(\psi) = r\psi c - 1, \tag{2}$$

$$y_2(\psi) = r\psi - 1. \tag{3}$$

Получим следующую задачу:

$$y_1 u + y_2 v \to \max,$$

$$cu + v \leq \frac{g}{r}, \quad u \geq 0, \quad v \in [0,\ 1]. \tag{4}$$

Полученная задача является задачей линейного программирования с двумя переменными, поэтому ее можно решить графически [10–12].

Очевидно, что максимум функции достигается в угловой точке допустимого множества. Все зависит от расположения вектора нормали (целевого вектора) $y = y(y_1,\ y_2)$, который указывает направление возрастания целевой функции $(y_1 u + y_2 v)$. Далее рассмотрим все случаи его расположения.

Решим задачу (4) графически в зависимости от значений y_1 и y_2, с учетом соотношения $g/r \leq 1$.

1. Особый случай, когда $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$, при этом управления могут принимать любые значения из класса допустимых управлений.

Проверим, возможен ли этот случай:

$$y_1(\psi) = \psi rc - 1 = 0,$$

$$y_2(\psi) = \psi r - 1 = 0.$$

Из равенств следует, что $c = 1$, а это противоречит условию задачи, т. е. данный вариант не допустим.

2. Случай, при котором $y_1 = 0$ и $y_2 > 0$. Решением задачи будет

$$\begin{cases} u^* = 0 \\ v^* = \dfrac{g}{r} \end{cases}.$$

Так как $y_1 = 0$, то $\psi rc - 1 = 0$. Отсюда

$$\psi r = \frac{1}{c}.$$

С учетом этого соотношение (3) примет следующий вид:

$$y_2 = \psi r - 1 = \frac{1}{c} - 1 > 0.$$

Следовательно, это предположение выполнимо.

3. Пусть $y_1 > 0$, $y_1 < cy_2$, тогда решением задачи будет

$$\begin{cases} u^* = 0 \\ v^* = \dfrac{g}{r} \end{cases}.$$

Так как $y_1 < cy_2$, то

$$\psi rc - 1 < \psi rc - c,$$

следовательно, $c - 1 < 0$. Потому как $c < 1$, данное условие выполняется, значит, такой случай возможен.

4. Случай, где $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, $y_1 > cy_2$, при этом решение будет иметь вид:

$$\begin{cases} u^* = \dfrac{g}{rc} \\ v^* = 0 \end{cases}.$$

Подставив в неравенство $y_1 > cy_2$ выражения для y_1 и y_2, приходим к неравенству $c - 1 > 0$, выполнение которого по условию задачи невозможно, т. е. данный вариант не подходит.

5. В случае при котором $y_1 > 0$, $y_2 = 0$, решение будет иметь вид:

$$\begin{cases} u^* = 0 \\ v^* = \dfrac{g}{r} \end{cases}.$$

Воспользовавшись выражениями для y_1 и y_2, опять приходим к противоречию $c - 1 > 0$ и отбрасываем этот вариант.

6. Пусть $y_1 > 0$, $y_2 < 0$, $y_1 > cy_2$. Тогда оптимальной является точка

Bulletin of Baikal State University, 2017, Vol. 27, no. 2, pp. 274–280

$$\begin{cases} u^* = \dfrac{g}{rc} \\ v^* = 0 \end{cases}.$$

Так как $y_1 > cy_2$, то получаем

$$\psi rc - 1 < \psi rc - c.$$

Отсюда $c - 1 > 0$, следовательно, этот вариант не подходит.

7. В случае, когда $y_1 = 0$, $y_2 < 0$, оптимальным будет множество точек

$$\begin{cases} u^* \in [0,\ \dfrac{g}{rc}] \\ v^* = 0 \end{cases}.$$

Воспользовавшись формулами (2) и (3) по уже приведенной схеме, получаем неравенство $c - 1 > 0$, что говорит о недопустимости данного варианта.

8. Пусть $y_1 < 0$, $y_2 < 0$. Очевидно, что оптимальным решением будет точка

$$\begin{cases} u^* = 0 \\ v^* = 0 \end{cases}.$$

Если $y_2 < 0$, то из (3) получаем

$$\psi r < 1.$$

Теперь, учитывая это, рассмотрим y_1:

$$y_1 = \psi rc - 1 < c - 1 < 0,$$

т. е. неравенство $y_1 < 0$ выполняется, следовательно, этот вариант возможен.

9. В случае, при котором $y_1 < 0$, $y_2 > 0$, $y_1 < cy_2$, решением задачи будет

$$\begin{cases} u^* = 0 \\ v^* = \dfrac{g}{r} \end{cases}.$$

Снова воспользовавшись формулами (2) и (3), приходим к неравенству $c - 1 > 0$, из которого следует, что данный вариант возможен.

10. Пусть $y_1 < 0$, $y_2 = 0$, тогда решением задачи будет

$$\begin{cases} u^* = 0 \\ v^* \in [0,\ \dfrac{g}{r}] \end{cases}.$$

Поскольку $y_2 = 0$, то получаем $\psi r - 1 = 0$. Таким образом, выражение (2) примет вид

$$y_1 = c - 1 < 0.$$

Следовательно, этот вариант тоже не противоречит условиям.

11. В случае, когда $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, $y_1 = cy_2$, управление u^* принимает любое значение из отрезка $0 \le u^* \le g/rc$, а управление v^* задается уравнением прямой

$$v^* = -cu^* + \frac{g}{r}.$$

С учетом (2), (3) получаем

$$\psi rc - 1 = \psi rc - c, \quad c = 1.$$

Это равенство не выполняется в силу того, что $c < 1$ по условию задачи. Следовательно, рассмотренный случай невозможен.

Теперь проанализируем все допустимые случаи и объединим их в общее решение

$$u^*(t) = 0,$$

$$v^*(\psi,\ t) = \begin{cases} 0, & y_2(\psi,\ t) < 0 \\ [0;\ \dfrac{g}{r}], & y_2(\psi,\ t) = 0 \\ \dfrac{g}{r}, & y_2(\psi,\ t) > 0 \end{cases}.$$

Приведем схему дальнейшего решения задачи [13–16]:

1. По найденным управлениям вычислим $\psi(t,\ u,\ v)$, $t \in [0,\ T]$.

2. Построим экстремальные управления

$$u^* = u^*(\psi(t,\ u,\ v),\ t), \quad t \in [0,\ T],$$

$$v^* = v^*(\psi(t,\ u,\ v),\ t), \quad t \in [0,\ T].$$

3. Найдем фазовую траекторию $x(t)$, $t \in [0,\ T]$, как решение системы

$$\dot{x} = r(cu^* + v^*)x, \quad x(0) = x_0.$$

Приступим непосредственно к решению задачи.

По найденным управлениям рассчитаем сопряженную траекторию $\psi(t,\ u,\ v)$, $t \in [0,\ T]$. Так как в этом случае управление $u^* = 0$, то будем рассматривать, какие значения принимает функция y_2 на $[0,\ T]$. Найдем ее значение в конечный момент времени T:

$$y_2(\psi)\Big|_{t=T} = (r\psi - 1)\Big|_{t=T} = r\psi(T) - 1 = -1 < 0.$$

Следовательно, $v^* = 0$. Подставляем данные управления в сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = \rho\psi - r\psi(cu + v) - (1 - u - v),\ \ \psi(T) = 0,$$

получаем

$$\dot{\psi} = \rho\psi - 1, \quad \psi(T) = 0.$$

Решая задачу Коши, получим общую формулу для сопряженной траектории:

$$\psi(t) = c_1 e^{\rho t} + \frac{1}{\rho}.$$

С учетом $\psi(T) = 0$, получим

$$c_1 e^{\rho T} + \frac{1}{\rho} = 0 \ \Rightarrow\ c_1 = -\frac{1}{\rho} e^{-\rho T},$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} e^{\rho(t-T)}, \quad t \le T.$$

Подставляем найденное решение в y_2:

$$y_2(\psi(t)) = r\psi(t) - 1 = \frac{r}{\rho}(1 - e^{\rho(t-T)}) - 1.$$

Известия Байкальского государственного университета. 2017. Т. 27, № 2. С. 274–280

Найдем точку переключения $y_2(t) = 0$:

$$\frac{r}{\rho}(1-e^{\rho(t-T)})=1,$$

$$e^{\rho(t-T)}=\frac{r-\rho}{r}.$$

Прологарифмировав это выражение, получим

$$\rho(t-T)=\ln\left(\frac{r-\rho}{r}\right),$$

отсюда

$$t=T-\frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{r}{r-\rho}\right).$$

Обозначим через

$$\tau_1=T-\frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{r}{r-\rho}\right)$$

точку переключения. В точке $t=\tau_1$, $y_2(t)=0$, при $\tau_1<t\le T$, $y_2(t)<0$. Найдем знак $y_2(t)$ в зависимости от расположения τ_1.

1. Если $\tau_1\le 0$, то $y_2(t)<0$, $0\le t\le T$. Значит

$$\begin{cases}u^*=0\\ v^*=0\end{cases}, \quad t\in[0,\ T].$$

2. Если $0 < \tau_1 < T$, то сделаем предположение на знак $y_2(\psi)$ на участке $(0,\ \tau_1]$:

– $y_2(\psi) < 0$ на $0 < t < \tau_1$;
– $y_2(\psi) = 0$ на $0 < t < \tau_1$;
– $y_2(\psi) > 0$ на $0 < t < \tau_1$.

Далее проведем анализ этих ситуаций:

1. Пусть $y_2(t) < 0$, $t < \tau_1$, следовательно, $v^* = 0$. Подставляем данное управление в сопряженное уравнение и находим его решение:

$$\dot\psi=\rho\psi-1 \;\Rightarrow\; \psi(t)=c_2e^{\rho t}+\frac{1}{\rho},$$

$$\psi(\tau_1)=\frac{1}{r} \;\Rightarrow\; c_2e^{\rho T}+\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r} \;\Rightarrow\; c_2=\frac{\rho-r}{r\rho}e^{-\rho\tau_1},$$

$$\psi(t)=\frac{1}{\rho}+\frac{\rho-r}{r\rho}e^{\rho(t-\tau_1)}, \quad t<\tau_1.$$

Подставляем найденное решение в y_2:

$$y_2(\psi(t),\ t)=r\psi(t)-1=$$

$$=\frac{r}{\rho}\left(1+\frac{\rho-r}{r}e^{\rho(t-\tau_1)}\right)-1=\left(1-\frac{r}{\rho}\right)(e^{\rho(t-\tau_1)}-1),$$

так как

$$\rho<r \;\Rightarrow\; 1-\frac{r}{\rho}<0.$$

На рассматриваемом промежутке $t-\tau_1<0 \Rightarrow e^{\rho(t-\tau_1)}<1 \Rightarrow e^{\rho(t-\tau_1)}-1<0$. В итоге получаем, что $y_2(t) > 0$, $t < \tau_1$. Пришли к противоречию, значит данный случай не выполняется.

2. Пусть $y_2(t) = 0$, $t > \tau_1$. Проверим возможность скользящего режима: если $y_2(\psi,\ t)=r\psi-1$, то $\psi=1/r$.

Проведем проверку с помощью дифференцирования по t:

$$\frac{d}{dt}(r\psi-1)=0 \;\Rightarrow\; r\dot\psi=0 \;\Rightarrow\; \dot\psi=0.$$

Вернемся к сопряженному уравнению

$$\dot\psi=\rho\psi-r\psi v-1+v=0,$$

$$v(r\psi-1)=0 \;\Rightarrow\; \rho\psi-1=0 \;\Rightarrow\; \psi=\frac{1}{\rho}\ne\frac{1}{r}.$$

Пришли к противоречию, значит данный случай не выполняется.

3. Пусть теперь $y_2(t) > 0$, $t < \tau_1$, следовательно, $v^* = g/r$. Подставляем данное управление в сопряженное уравнение

$$\dot\psi=\rho\psi-r\psi(cu+v)-(1-u-v), \quad \psi(T)=0.$$

Получаем

$$\dot\psi=\rho\psi-g\psi-1+\frac{g}{r}, \quad \psi(\tau_1)=\frac{1}{r}.$$

Решим поставленную задачу Коши. Ее решение находится по стандартной формуле:

$$\psi(t)=\frac{g-r}{r(g-\rho)}+\frac{r-\rho}{r(g-\rho)}e^{(g-\rho)(\tau_1-t)}.$$

Подставляем полученное выражение в $y_2(\psi(t),\ t)$:

$$y_2(t)=\frac{g-r}{g-\rho}+\frac{r-\rho}{g-\rho}e^{(g-\rho)(\tau_1-t)}-1=$$

$$=\frac{r-\rho}{g-\rho}(e^{(g-\rho)(\tau_1-t)}-1).$$

Оценим данное выражение при условии, что $0 < \rho < r$ и $0 < g \le r$:

1. Если $(g - \rho) < 0$, то $(e^{(g-\rho)(\tau_1-t)}-1)<0$ и

$$\frac{r-\rho}{g-\rho}<0.$$

Значит $y_2(t) > 0$, $0 \le t < \tau_1$.

2. Если $(g - \rho) > 0$, то $(e^{(g-\rho)(\tau_1-t)}-1)>0$ и

$$\frac{r-\rho}{g-\rho}>0.$$

Значит $y_2(t) > 0$, $0 \le t < \tau_1$.

Таким образом, $y_2(t) > 0$, $0 \le t < \tau_1$. Это не противоречит нашим предположениям, следовательно, данный случай выполняется.

В результате получили экстремальное управление:

1. Если $\tau_1 \le 0$, т. е.

$$T\le\frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{r}{r-\rho}\right),$$

тогда

$$\begin{cases}u^*(t)=0\\ v^*(t)=0\end{cases}, \quad t\in[0,\ T].$$

Соответствующую фазовую траекторию $x^*(t) = x_0$ можно представить в виде графика (рис. 1).

Bulletin of Baikal State University, 2017, Vol. 27, no. 2, pp. 274–280

ISSN 2500-2759

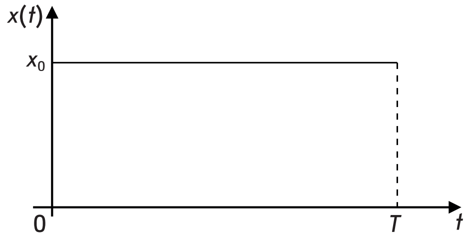

Рис. 1. График фазовой траектории

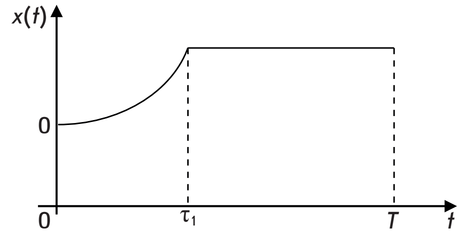

Рис. 2. График фазовой траектории

2. Если $\tau_1 > 0$, т. е.

$$T > \frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{r}{r-\rho}\right),$$

тогда

$$u^*(t) = 0,$$

$$v^*(t) = \begin{cases} \dfrac{g}{r}, & 0 \le t < \tau_1 \\ 0, & \tau_1 \le t \le T \end{cases}.$$

Соответствующую фазовую траекторию

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 e^{gt}, & 0 \le t < \tau_1 \\ x_0 e^{g\tau_1}, & \tau_1 \le t \le T \end{cases}$$

также можно представить в виде графика (рис. 2).

Приведем экономическую интерпретацию оптимального управления:

1. $u^*(t) = 0$, $v^*(t) = 0$ на всем отрезке, если

$$T \le \frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{r}{r-\rho}\right).$$

В этом случае выгоднее ничего не предпринимать: ни привлекать, ни размещать капитал.

2. $u^*(t) = 0$

$$v^*(t) = \begin{cases} \dfrac{g}{r}, & 0 \le t < \tau_1 \\ 0, & \tau_1 \le t \le T \end{cases},$$

если

$$T > \frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{r}{r-\rho}\right).$$

В этом случае привлекать дополнительные средства нецелесообразно на всем периоде планирования. Доля собственных средств, подлежащих размещению, в первом периоде должна составлять g/r, а во втором периоде при

$$t \in \left[T - \frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{r}{r-\rho}\right),\ T\right]$$

размещать собственные средства не выгодно.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sakswa Y. On global convergence of an algorithm for optimal control / Y. Sakawa, Y. Shindo // IEEE Transacnons on Automatic Control. — 1980. — Vol. AC-25, № 6. — P. 1149–1158.

2. Sethi S. P. Optimal control theory. Application to management science / S. P. Sethi, G. L. Thomson. — Boston : Martinus Nijhoff Publ. Co., 1981. — 481 p.

3. Антипина Н. В. Линейные функции Ляпунова-Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума / Н. В. Антипина, В. А. Дыхта // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2002. — Т. 46, № 12. — С. 9–20.

4. Аргучинцев А. В. Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума / А. В. Аргучинцев, В. А. Дыхта, В. А. Срочко // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2009. — Т. 53, № 1. — С. 3–43.

5. Кротов В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. — М. : Наука, 1973. — 446 с.

6. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В. А. Срочко. — М. : Физматлит, 2000. — 160 с.

7. Алексеев В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1979. — 432 с.

8. Срочко В. А. Достаточные условия оптимальности экстремальных управлений на основе формул приращения функционала / В. А. Срочко, В. Г. Антоник // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2014. — Т. 58, № 8. — С. 96–102.

9. Срочко В. А. Достаточные условия оптимальности в задачах управления на основе формул приращения функционалов / В. А. Срочко, В. Г. Антоник, Е. В. Аксенюшкина // Известия Иркутского государственного университета. Сер.: Математика. — 2014. — Т. 8. — С. 125–140.

10. Аксенюшкина Е. В. Математика-2. Нелинейное и линейное программирование / Е. В. Аксенюшкина, Н. В. Тарасенко, С. В. Тимофеев. — Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2009. — 124 с.

11. Табак Д. Оптимальное управление и математическое программирование / Д. Табак, Б. Куо. — М. : Наука, 1975. — 280 с.

12. Тятюшкин А. И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем / А. И. Тятюшкин. — Новосибирск : Наука, 1992. — 193 с.

Известия Байкальского государственного университета. 2017. Т. 27, № 2. С. 274–280

ISSN 2500-2759

13. Аксенюшкина Е. В. Методы игольчатой линеаризации в задачах оптимального управления с функциональными ограничениями / Е. В. Аксенюшкина // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1998. — Т. 42, № 12. — С. 93–97.

14. Аксенюшкина Е. В. К численному решению задач оптимального управления с функциональными ограничениями / Е. В. Аксенюшкина // Оптимизация, управление, интеллект. — 1999. — № 3. — С. 152–156.

15. Необходимые условия в оптимальном управлении / А. П. Афанасьев, В. В. Дикусар, А. А. Милютин, С. А. Чуканов. — М. : Наука, 1990. — 319 с.

16. Тарасенко Н. В. Один метод решения задачи оптимального управления на основе интегрального принципа максимума / Н. В. Тарасенко // Дискретные и распределительные системы: дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения : сб. науч. тр. / отв. ред. В. В. Васильев. — Иркутск : Иркут. гос. ун-т, 1981. — С. 142–150.

REFERENCES

1. Sakswa Y., Shindo Y. On global convergence of an algorithm for optimal control. *IEEE Transacnons on Automatic Control*, 1980, vol. AC-25, no. 6, pp. 1149–1158.

2. Sethi S. P., Thomson G. L. *Optimal Control Theory. Application to Management Science*. Boston, Martinus Nijhoff Publ. Co., 1981. 481 p.

3. Antipina N. V., Dykhta V. A. Linear Lyapunov–Krotov functions and sufficient conditions for optimality in the form of the maximum principle. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika = Russian Mathematics, 2002*, vol. 46, no. 12, pp. 9–20. (In Russian).

4. Arguchintsev A. V., Dykhta V. A., Srochko V. A. Optimal control: nonlocal conditions, computational methods, and the variational principle of maximum. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika = Russian Mathematics*, 2009, vol. 53, no. 1, pp. 3–43. (In Russian).

5. Krotov V. F., Gurman V. I. *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Optimal Control Methods and Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 446 p.

6. Srochko V. A. *Iteratsionnye metody resheniya zadach optimal'nogo upravleniya* [Iteration Methods and Problem Solutions of the Optimal Control]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000. 160 p.

7. Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. *Optimal'noe upravlenie* [The Optimal Control]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 432 p.

8. Srochko V. A., Antonik V. G. Sufficient optimality conditions for extremal controls based on functional increment formulas. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika = Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 8, pp. 96–102. (In Russian).

9. Srochko V. A., Antonik V. G., Aksenyushkina E. V. Sufficient optimality conditions based on functional increment formulas in control problems. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika = The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2014, vol. 8, pp. 125–140. (In Russian).

10. Aksenyushkina E. V., Tarasenko N. V., Timofeev S. V. *Matematika-2. Nelineinoe i lineinoe programmirovanie* [Mathematics-2. Non-linear and Linear Programming]. Irkutsk, Baikal State University of Economics and Law Publ., 2009. 124 p.

11. Tabak D., Kuo B. *Optimal'noe upravlenie i matematicheskoe programmirovanie* [Optimal Control and Mathematical Programming]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 280 p.

12. Tyatyushkin A. I. *Chislennye metody i programmnye sredstva optimizatsii upravlyaemykh sistem* [Numerical Methods and Software Utilities of the Controlled Systems Optimisation]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1992. 193 p.

13. Aksenyushkina E. V. The method of needle-shaped linearization in optimal control problems with functional restraints. *Izvestiya Vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika = Russian Mathematics,* 1998, vol. 42, no. 12, pp. 93–97. (In Russian).

14 Aksenyushkina E. V. Considering the numerical solution of the optimal control problems with functional restraints. *Optimizatsiya, upravlenie, intellekt = Optimisation, Control, Intellect*, 1999, no. 3, pp. 152–156. (In Russian).

15. Afanas'ev A. P., Dikusar V. V., Milyutin S. A., Chukanov A. A. *Neobkhodimye usloviya v optimal'nom upravlenii* [Sufficient Conditions in an Optimal Equation]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 319 p.

16. Tarasenko N. V. Solving the optimal control problem with certain method based on the integral maximum principle. In Vasil'ev V. V. (ed.). *Diskretnye i raspredelitel'nye sistemy: differentsial'nye i integral'nye uravneniya i ikh prilozheniya* [Discrete and Distributing Systems: Differential and Integral Equations and Their Annexes]. Irkutsk State University Publ., 1981, pp. 142–150. (In Russian).

Информация об авторе

Аксенюшкина Елена Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и эконометрики, Байкальский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: aks.ev@mail.ru.

Библиографическое описание статьи

Аксенюшкина Е. В. Построение оптимальной инвестиционной политики фирмы / Е. В. Аксенюшкина // Известия Байкальского государственного университета. — 2017. — Т. 27, № 2. — С. 274–280. — DOI: 10.17150/2500-2759.2017.27(2).274-280.

Author

Elena V. Aksenyushkina — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematics and Econometrics, Baikal State University, 11 Lenin St., 664003, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: aks.ev@mail.ru.

Reference to article

Aksenyushkina E. V. The optimal investment policy of the company. *Izvestiya Baykal'skogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Baikal State University*, 2017, vol. 27, no 2, pp. 274–280. DOI: 10.17150/2500-2759.2017.27(2).274-280. (In Russian).

ISSN 2500-2759